15 мавзу: Аниқ интегралдан фойдаланиб фигуралар юзаси ва айланма жисмлар ҳажмини ҳисоблаш

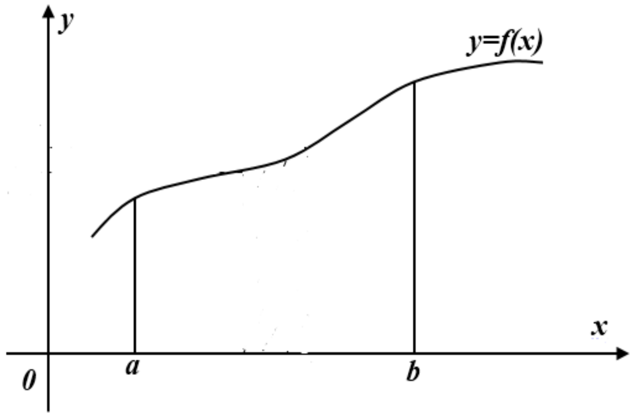
Энди аниқ интегралнинг айрим тадбиқларини кўриб чиқайлик. $[a,b]$ ораликда $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар узлуксиз бўлиб, $g(x) \leq f(x)$ тенгсизлик ўринли бўлсин.

$y = f(x)$ функция графиги, $x = a$, $x = b$ иккита тўғри чизиқлар ва Ox ўқи билан чегараланган фигурага *эгри чизиқли трапеция* дейилади

(19-чизма). Бундай эгри чизиқли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

формула билан ҳисобланади.



19-чизма.

Худди шунингдек, $x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзаси

$$S = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \varphi(y)dy$$

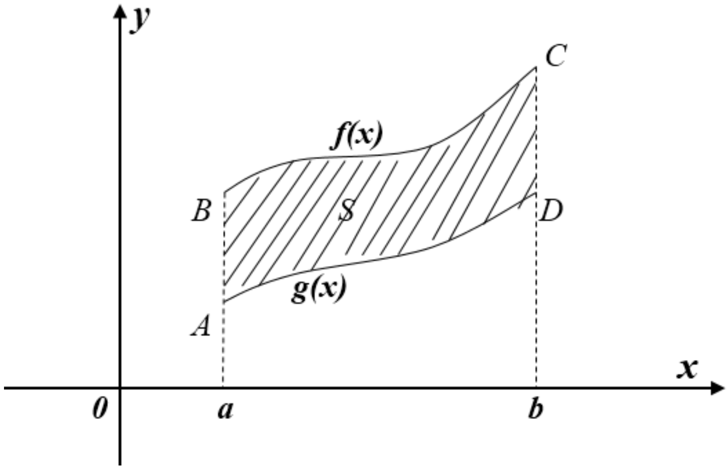
формулаёрдамида ҳисобланади.

1-масала. Чапдан $x = a$, ўнгдан $x = b$ тўғри чизиқлари ва юқоридан $f(x)$, пастдан $g(x)$ функциялар билан чегараланган соҳа S -юзани ҳисобланг (20-чизма).

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

шу формулани исбот қилайлик.

Ечиш. Умумийликка зарар келтирмасдан $0 \le g(x) \le f(x)$ деб олишимиз мумкин. У ҳолда қуйидаги шаклдан иборат:



20-чизма.

У ҳолда эгри чизиқли трарпециянинг юзасини ҳисоблаш формуласига кўра:

$$S_{ABCD} = S_{aBCb} - S_{aADb} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$S_{ШТ} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

1-мисол. $xy = 8,\ x = 1,\ x = e,\ y = 0$ чизиқлар билан чегараланган юзани ҳисобланг

Ечиш. $y = \dfrac{8}{x}$ бўлиб, $S = \int_a^b f(x)dx$ формулага асосан,

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^e \frac{8}{x}dx = 8(\ln e - \ln 1) = 8$$

2-мисол. $y = x^2, y^2 = x$ чизиқлар билан чегараланган юзани топинг.

Ечиш. $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$

тенгламалар системасидан

$$x^4 = x,$$
$$x^4 - x = 0,$$
$$x_1 = 0;\ x_2 = 1$$

берилган функциялар кесишиш нуқталарининг абсциссаларини топамиз, у ҳолда изланаётган юза

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

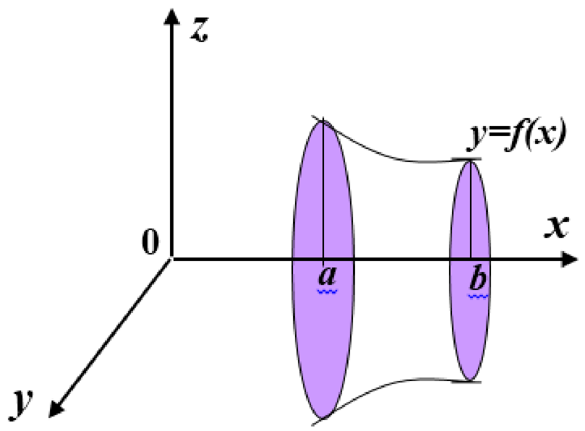
бўлади.

Аниқ интегралдан фойдаланиб фигуралар ҳажмини ҳисоблаш

2-масала. $[a,b]$ ораликда $f(x)$ функция узлуксиз бўлиб, $f(x) \geq 0$ тенгсизлик ўринли бўлсин. $y = f(x)$ функция графигини Ox ўқи атрофида айланитиришдан, ҳамда xyz фазодаги $x=a$ ва $x = b$ текисликлар билан чегараланган айланма жисмнинг V ҳажмини топинг.

Яъни, $y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини топиш керак бўлсин (21-чизма).

Ечиш. Бу масалани ҳал қилиш учун $[a,b]$ оралиқни $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ нуқталар билан бўламиз.



21-чизма.

Сўнгра $[x_i, x_{i+1}]$ ораликдан бирон бир ξ_i нуқтани олиб, $[x_i, x_{i+1}]$ оралиққа мос келувчи айланма жисм ҳажмини радиуси $f(\xi_i)$ га баландлиги Δx_i га тенг бўлган цилиндр ҳажми билан алмаштирамиз.

Агар биз Δx_i ни нолга интилтирсак, бу алмаштиришдаги хатолик шунчалик камайиб боради.

Энди $[x_i, x_{i+1}]$ га мос келувчи цилиндр ҳажми $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз:

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

Юқоридаги фикрни эътиборга, олсак

$$V = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Демак, айланма жисм ҳажми учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз

$$V_{айл.жисм} = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

Худди шунингдек, $x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ чизиқлар билан чегараланган фигуранинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажми

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$

формула билан ҳисобланади.

3-мисол. $y^2 = 2x$ парабола, $x = 3$ тўғри чизиқ ва Ox ўқи билан чегараланган фигуранинг Ox ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Масала шартига кўра x о дан 3 гача ўзгаради. Демак,

$$V_x = \pi\int_0^3 y^2 dx = \pi\int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi .$$

4-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипснинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Бундай жисмга айланма эллипсоид дейилади. Эллипс тенгламасидан

$x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ бўлиб, интегралнинг чегаралари $c=-b,\ d=b$ бўлади.

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$

формулага асосан,

$$V_y=\pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi a^2\int_{-b}^{b}dy-\frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2dy=\pi a^2\, y\Big|_{-b}^{b}-\pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b}=$$

$$=\pi a^2\left[b-(-b)\right]-\pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3-(-b)^3\right]=2\pi a^2b-\frac{2}{3}\pi a^2b=\frac{4}{3}\pi a^2b.$$

Демак, $V_y=\frac{4}{3}\pi a^2b$

$a=b=R$ бўлса, шар ҳосил бўлиб $V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3$ бўлади.

Эгри чизиқ ёйи узунлигини ҳисоблаш

Тўғри бурчакли координатлар системасида $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада силлиқ (яъни $y=f(x)$ функциянинг ҳосиласи узлуксиз) бўлса, бу эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$l=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

формула ёрдамида ҳисобланади.

Эгри чизиқ параметрик тенглама

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

билан берилган бўлса, ёй узунлиги

$$l=\int_a^b\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

аниқ интеграл билан ҳисобланади.

Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш

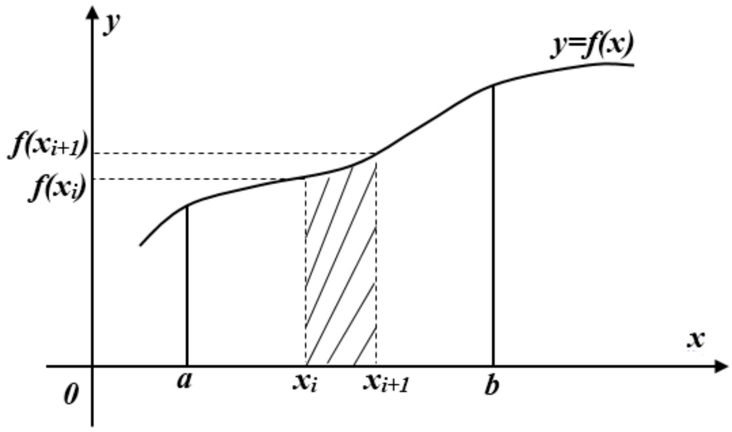
Энди аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш масаласини кўрайлик.

Шуни таъкидлаш лозимки, узлуксиз бўлган ҳар қандай функция учун Нютон-Лейбниц формуласини қўллай олмаймиз, чунки, бу формулани қўллаш учун, $y = f(x)$ функциянинг бошланғич функциясини билишимиз керак. Лекин узлуксиз бўлган кўпгина функцияларнинг бошланғич функцияларини, яъни аниқмас интегралларни ҳар доим ҳам чекли қадамда интеграллай олмаймиз.

Масалан, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ интеграл шундайлардан биридир.

Шунга ўхшаш интегралларни ҳисоблашда тақрибий ҳисоблаш формулаларни қўллаш мумкин. Шундай формулалардан бири, трапециялар формуласини келтирамиз.

$[a,b]$ оралиқда $y = f(x)$ функция узлуксиз ва $f(x) \geq 0$ бўлсин. У ҳолда $\int_a^b f(x)dx$ интеграл $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ва $y = 0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция юзини беради.



22-чизма.

$\int_a^b f(x)dx$ интегрални ҳисоблашда $[x_i, x_{i+1}]$ бўлакка мос келувчи $y = f(x)$ эгри чизиқ бўлагини, $(x_i, f(x_i))$ ва $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ билан алмаштирсак, излаётган эгри чизиқли трапеция юзининг $[x_i, x_{i+1}]$ оралиққа мос келувчи бўлган трапеция билан алмаштирган бўламиз (22-чизма). Бу трапеция юзини S_i десак, бу юза

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

тенглик орқали топилади. x_i нуқталарни шундай танлаб олайликки, $[a,b]$ оралиқ бу нуқталар билан тенг n та бўлакка бўлинсин, яъни $x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$ бўлсин.

У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0+S_1+S_2+...+S_{n-1}$$

тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0+S_1+...+S_{n-1}=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+...+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_i)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right]$$

тенглик ўринли бўлар экан. Бу формулада, $h=\frac{b-a}{n}$ белгилаш киритсак, $x_0=a,\ x_i=x_0+ih,\ i=1,2,...,n$ тенгликлар ўринли бўлади. $x_0=a$ ва $x_n=b$ эканлигидан

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{n-1})\right)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формула аниқ интегрални тақрибий ҳисоблашнинг трапециялар формуласи дейилади. Бу формулада хатоликни камайтириш учун n ни етарлича катта олиш зарур. Хатоликни баҳолаш учун маълум тенгсизликлардан фойдаланилади.

Аниқ интегралнинг иқтисодиётга тадбиқлари

Энди аниқ интегралнинг иқтисодиётга тадбиқларини кўриб чиқамиз.

1) Маълумки, *меҳнат унумдорлиги* иш куни мобайнида ўзгарувчи микдордир. Меҳнат унумдорлиги $y=f(x)$ функция билан ифодалансин, бунда x иш кунининг бошланишидан ҳисобланган вақт оралиғи, $f(x)$ эса вақтнинг шу ондаги (моментидаги) *меҳнат унумдорлигини* билдиради. Меҳнат унумдорлигининг иш кунининг 4 соатидаги ҳажмини ҳисоблаш масаласи қўйилган бўлсин.

Вақтнинг (0;4) оралиғини энг каттасининг узунлиги Δx бўлган оралиқларга бўламиз ва $f(x)$ функция бу кичик оралиқларда ўзгармас десак ишлаб чиқариш меҳнт унумдорлигини $f(x)\,\Delta x$ кўпайтмага тенг бўлади. Шундай қилиб, иш кунининг 4-соатидаги ишлаб чиқариш меҳнат унумдорлиги

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum f(x)\,\Delta x=\int_0^4 f(x)dx$$

тенглик билан ифодаланади.

2) Маҳсулотлар омборига вақт бирлигида келтириладиган маҳсулот миқдорини $f(x)$ ва маҳсулот омборга келиб тушушидан бошланган вақт бирлиги x бўлса, x дан $x+\Delta x$ вақт оралиғидаги омборга $f(x)\,\Delta x$ бирлик маҳсулот келади. Демак, омборга маҳсулот узлуксиз келиб турса, ундаги *товарнинг заҳираси*

$$\int_0^x f(x)dx$$

билан ифодаланади.

Мавзу юзасидан саволлар

1. Аниқ интеграл билан юзларни ҳисоблаш формуласини ёзинг.
2. Аниқ интеграл ёрдамида юза қандай топилади?
3. Аниқ интеграл ёрдамида айлнма жисмлар хажмларини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
4. Эгри чизиқ ёйи узунлигини аниқ интеграл ёрдамидан қандай ҳисоблаш мумкин?
5. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш формуласини ёзинг.
6. Аниқ интегралнинг иқтисодиётга тадбиқлари ҳақида нима биласиз?