4-ma'ruza mavzu: Algebralar orasidagi izomorfizm tushunchasi. Teskarilanuvchi chiziqli operatorlar.

Dastlabki bo'limda binar algebraik amallarning tushunchasi tanishtirib o'tilgan edi, biz hozir yana algebraik tuzilishlarni tanishtiramiz. Biroq, bizning keyingi maqsadimiz bu chiziqli algebraning asosiy g'oyalarini tanishtirish, buning ichiga vektor fazolar kiradi. Bizning asosiy diqqat e'tiborimiz maydonlar tuzilishiga qaratilgan bu yerda keraklidir. Biz bu kitobda keyinroq, boshqa algebraik tuzilishlarni o'rganamiz.

3.2.1. Ta'rif. D bilan ikkita algebraik amllar qo'shish ko'paytirish taqsimlangan xalqasi deyiladi, agar quyidagi xossalarni qoniqtirilsa (o'rinli bo'lsa)

(i) Qo'shishning kommuntativligi,

$x + y = y + x$

barcha $x, y \in D$ elementlar uchun

(ii)Qo'shishning assatsiativligi

$x + (y + z) = (x + y) + z$

barcha $x, y, z \in D$ elementlar uchun

(iii) D nol ememntga ega 0_D, element quyidagi xossaga ega

$x + 0_D = 0_D + x = x$

barcha $x \in D$ elementlar uchun

(iv) Har bir $x \in D$ element additiv teskarilanuvchan elementga ega (qarama-qarshi element) $-x \in D$, bu element quyidagi xossaga ega

$x + (-x) = 0_D;$

(v) D da distributivlik qonuni

$x(y + z) = xy + xz$ va $(x + y)z = xz + yz$

barcha $x, y, z \in D$ elementlar uchun

(vi) D multiplikativ o'ziga xos elementga $e \neq 0_D$ ga ega, bu xossa quyidagi xossaga ega

$$xe = ex = x$$

barcha $x \in D$ elementlar uchun

(vii) Ko'paytirish assatsiativ

$$x(yz) = (xy)z$$

barcha $x, y, z \in D$ elementlar uchun

(viii) Har bir nol bo'lmagan element $x \in D$ multiplikativ teskari element $x^{-1} \in D$ ga va quyidagi xossaga ega

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

Bu yerda turli xil fikrlarni eslatib o'tishimiz kerak. D ni qo'shish amali bilan birgalikda o'ylaymiz. U holda, D, D_+ bo'ladi. bu holda va D_+ bo'linish xalqasining additiv gruppasi deyiladi. U holda, biz faqatgina ko'paytirish amalini muhokama qilamiz va D xalqaning ko'paytirish gruppasi xaqida suhbatlashamiz. Bu D ning nol bo'lmagan to'plamidir. $U(D)$ yoki $D_\times$ bu ko'paytirish amalining tasarrufidadir. Biz shuningdek belgilanishiga izoh beramiz. $0_D \neq x \in D$ da x^{-1}ni x teskarisi deb belgilaymiz. Qachonki $D = \mathbb{Q}$ ratsional sonlar to'plamida misol qilsak, u holda x^{-1}, x uning teskarisi deyiladi, ya'ni $1/x$. Umuman olganda, D bo'linish xalqasida, odatda x teskarisini x^{-1} deb yoziladi $1/x$ emas.

Qarama-qarshi elementi biz ayirish amali yordamida, quyidagicha yozamiz

$$a - b = a + (-b).$$

Bu ta'rifning ko'plab boshlang'ich natijalar bor ya'ni bular, isbotga oson, qat'iy isobt talab qiladigan. Biz quyida ta'minlashimiz yuqoridagilarni.

3.2.2. Ta'rif. D ayrish xalqasi berilgan. U holda

(i) $a\cdot 0_D = 0_D \cdot a = 0_D$;

(ii) $a(-b) = (-a)b = -ab$, barcha $a,b\in D$ uchun;

(iii) $a(b-c) = ab - ac$ va $(a-b)c = ac - bc,$ barcha $a,b,c\in D$ uchun;

Isbot. Har bir $x\in D$ uchun biz $x+0_D = x$ ga egamiz. Distributivlik xossasiga ko'ra biz

$$ax = a(x+0_D) = ax + a\cdot 0_D$$

ga egamiz.

U holda ax element qarama qarshi $-ax\in D$ elementga ega, buni tenglamaning ikkala tomoniga qo'shamiz va moslik xossasidan foydalanib, biz

$$0_D = -ax + ax = -ax + ax + a\cdot 0_D = 0_D + a\cdot 0_D = a\cdot 0_D,$$

o'xshash ifoda $0_D \cdot a = 0_D$ ga ega bo'lamiz.

Qarama qashilik ta'rifidan foydalanib va distributivlik qonunidan foydalanib quyidagi natijaga erishamiz

$$0_D = a\cdot 0_D = a(b+(-b)) = ab + a(-b),$$ barcha $a,b\in D$ uchun.

Shunday qilib $a(-b)$ bu a,b ning qarama qarshisiir, buning ma'nosi $a(-b) = -(ab) = -ab$ va biz buni shunga o'xshash ifoda bilan $(-a)b = -ab$ bilan ko'rsata olamiz.

Biz hozir distributivlik qonunining ayrish va ko'paytirish amallari aloqadorligidan foydalanib quyidagi natijaga ega bo'lamiz

$$a(b-c) = a(b+(-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac,$$

va o'xshash ravishda

$$(a-b)c = ac - bc.$$

3.2.3.Muammo. Ayrish(bo'lish) xalqasi berilgan

(i) Agar $ab = 0_D$ bo'lsa, u holda $a = 0_D$ yoki $b = 0_D$ bo'ladi.

(ii) Agar $ab = ac$ va $a \neq 0_D$ bo'lsa, u holda $b = c$ bo'ladi.

(iii) Agar $ba = ca$ va $a \neq 0_D$ bo'lsa, u holda $b = c$ bo'ladi.

Isbot. (i) $a \neq 0_D$ deb faraz qilamiz. U holda a^{-1} va bizda

$$0_D = a^{-1}0_D = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = eb = b,$$

bo'ladi.

(ii) Agar $ab = ac$ bo'lsa, u holda $0_D = ab - ac = a(b-c)$ bo'ladi. 3.2.2. ga ko'ra $a \neq 0_D$ bo'lsa, $b - c = 0_D$ dan va $b = c$ ga ko'ra tenglik isbotlanadi.

(iii) Bu yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Eslatma, 3.2.3.(ii) muammo D bo'lish(ayrish) xalqasida biz bekor qila olamiz (ii) natijani.

3.2.4. Ta'rif. D bo'linish(ayrish) xalqasi maydon deyiladi. Agar ko'paytirish amal kommuntativ bo'lsa. Shunday qilib, maydon $xy = yx(x, y \in D)$ xossaga ham ega bo'ladi.

$\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ ratsional to'plamlar va haqiqiy sonlar bilan, qo'shish va ko'paytirish amallari maydon uchun juda yaxshi misol bo'la oladi.

Bizning keyingi misolimiz, kichikroq maydon uchun bo'ladi. $F_2 = \{0,1\}$ va qo'shish va ko'paytirish amali quyidagicha bo'ladi

$$\begin{array}{ccc} + & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{va} \quad \begin{array}{ccc} \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0. \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

F_2 maydonni isbotlash oson, bizning birinchi misolimiz, chekli maydondir. Biz quyida bu jaryonni davom ettira olamiz.

p va $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ to'plam berilgan. biz hozir qo'shish va ko'paytirish ($\oplus$ va $\otimes$) amallarini quyidagi qoidalar asosida topamiz;

$0 \neq k \quad m \leq p-1$ berilgan. agar $k+m<p$ bo'lsa, u holda $k \oplus m = k+m$ bo'ladi. $k+m \geq p$ deb faraz qilamiz. 1.4.1.teoremaga ko'ra, mavjud bo'lga bir musbat butun sonlar uchun $k+m=bp+r$ bu yerda $0 \leq r < p$ bo'ladi va b, r lar o'ziga xos tarzda topiladi. Bu holda $k \oplus m = r$ berildi. Agar $km < p$ bo'lsa u holda $k \otimes m = km$ bo'ladi. $km \geq p$ deb faraz qilamiz. 1.4.1. teoremaga ko'ra, mavjud bo'lgan musbat sonlar c, u uchun $km > cp + u$ bu yerda $0 \leq u < p$ bo'ladi. bu yerda $k \otimes m = n$ bo'ladi. bu yerda nol element 0. Ayonki va shuningdek k ning qarama-qarshisi $p-k$ u holda $(p-k)+k=p$ bo'ladi ya'ni 0 qoldiq bo'ladi p bo'linuvchi. U holda quyidagi tenglama

$$(k+m)+t = k+(m+t), km = mk, (km)t = k(mt), k(m+t) = km+kt$$

o'rinli bo'ladi.

Quyidagilar nazarda tutiladi.

$$(k \oplus m) \oplus t = k \oplus (m \oplus t), k \otimes m = m \otimes k,$$
$$(k \otimes m) \otimes t = k \otimes (m \otimes t) \text{ va } k \otimes (m \oplus t) \oplus t = (k \otimes m) \oplus (m \otimes t).$$

Ayonki 1 raqam F_p ning o'ziga xos elementi. Natijada $0<k<p$ berilgan. u holda p tub son bo'ladi. k, p butun sonlar o'zaro tub bo'ladi. U holda, 1.4.7. aksiomaga ko'ra x, y butun sonlar uchun $kx+py=1$ o'rinli bo'ladi. U holda $kx = 1+pz$ ifoda $z=-y$ holda qanoatlantiriladi. Agar $x>p$ bo'lsa, u holda $x = px + a$, bu yerda $0 \neq a < p$ bo'ladi. u holda $kx = kpc + ka$ va $ka = kx - kpc$ shuningdek $ka = 1 + pz - pkc = 1 + p(z - kc)$ bo'ladi. natijada $k \otimes a = 1$ va u holda

a k ning multiplikativ teskari elemnti bo'ladi. bu yodda, barcha 3.2.1. ta'rifdan talablari qanoatlantiriladi, F_p $\oplus$ va $\otimes$ amallari maydonda qanoatlantiriladi.

3.2.5. Ta'rif. F maydon berilgan. H F ning subto'plami va u submaydon deb ataladi, faqatgina u, ya'ni H F maydonda ko'paytirish va qo'shish amalining turg'un(o'zgarmas) bo'lishi kerak va H ning o'zi ham maydon ostki o'xshash amal bo'lishi kerak.

3.2.6. Teorema. F maydon berilgan. agar H F ning submaydoni bo'lsa, u holda H quyidagi talablarni qo'yadi:

(***SF 1***) agar $x, y \in H$, bo'lsa, u holda $x - y \in H$ va $x, y \in H$ bo'ladi;

(***SF 2***) agar $x \in H$ va $x \neq 0_F$ bo'lsa, u holda $x^{-1} \in H$ bo'ladi.

H ni ikkitadan kam elementga ega deb faraz qilamiz. Agar H (***SF 1***) va (***SF 2***) shartlarni qabul qilsa, u holda H F ning submaydoni bo'ladi.

Isbot. H F ning submaydoni berilgan bo'lsin. Unda H F maydonning turg'un subto'plam ostisi(ko'paytirish va qo'shish amallarining) bo'ladi. shuningdek H 0_H elementga ega. U holda $x + 0_H = x$ har bir $x \in H$ uchun o'rinli bo'ladi. 3.2.1. Ta'rifga ko'ra $-x \in F$ element va $-x + x + 0_H = -x + x$ ifodalar bizga ma'lum edi. Shuningdek, biz yuqorida ko'rganimiz $0_H = 0_F$ va shuning uchun uchun y, F da x ning qarama-qarshi bo'ladi ya'ni $y = -x$ $-x \in H$. Agar x, y lar M ning asossiz elementlar bo'lsa, u holda $-y \in H$ bo'ladi. u holda H turg'un subto'plam osti yig'indi uchun $x - y = x + (-y) \in H$ o'rinli bo'ladi. u holda H, turg'un to'plam osti ko'paytirish amali esa, $xy \in H$ bo'ladi, shuning uchun H ni (***SF 1***) qanoatlantiradi. 3.2.1.ta'rifga ko'ra H, $e_H \neq 0_H$ bo'lgan o'ziga xos elementga ega va $e_H e_H = e_H$. U holda $0_F = 0_H$, $e_H \neq 0_H$ va 3.2.1. ta'rifga ko'ra, y element uchun $ye_H = e_H y = e_F$ bo'ladi. u holda

$$e_H = e_F e_H = ye_H e_H = ye_H = e_F.$$

Oqibatda $e_F \in H$ bo'ladi. 3.2.1. ta'rifga ko'ra har bir $x \in H$ nol bo'lmagan element uchun, $z \in H$ element $xz = e_H$ ifodani qanoatlantiradi. Uzoqdan beri $e_H = e_F$ ekanligini isbotladik va u holda, z F da $x$ning teskari multiplikativi bo'ladi. u holda $z = x^{-1} \in H$ bo'ladi. shunday qilib H (***SF 2***)ni qanoatlantiradi. Biz Hni ikkitadan oz elementlari bor deb hamda (***SF 1***) va (***SF 2***)larni qanoatlantiradi deb faraz qilamiz. U holda H nol bo'lmagan u elementga ega bo'ladi. (***SF 1***)ga ko'ra $0_F = u - u \in H$ va (***SF 2***)ga ko'ra $u^{-1} \in H$ bo'ladi. (***SF 1***)ning amaliy tatbiqi yana $e_F = uu^{-1} \in H$ ekanligini nazarda tutadi. Keyin, H ning asosiz x elementi berilgan (***SF 1***)ga ko'ra $-x = 0_F - x \in H$ bo'ladi. bizga Hning asosiz elementi y berilgan. yuqorida $-y \in H$ ekanligini ko'rgan edik, (***SF 1***)ning tatbiqini quyidagi misolorqali ko'rishimiz mumkin bo'ladi. $x + y = x - (-y) \in H$. U holda H, turug'un to'plam osti amal bo'ladi. (***SF 1***) talab Hning turg'un to'plam osti ko'paytirish amal ekanligini ko'rsatmaydi. Shunday qilib, qo'shish va ko'paytirish qoidasi Hga, binar amal bo'ladi. 3.2.1. ta'rifning (i), (ii), (v), (vi) talablari va H uchun ko'paytma kommuntativi bu qoidalar Fning barcha elementlari uchun yaroqli bo'ladi. biz yuqorida $0_F \in H$ning isbotlagan edik va 0_F Hning nol elementi edi. Biz yuqorida har bir $x \in H$ elementi uchun $-x \in H$ ekanligini isbotlagan edik va shuningdek $e_F \in H$ uchun ham. Shunday qilib H uchun e_F o'ziga xos elementdir. Natijada 3.2.1. ning (viii) talabi natijasidan (***SF 2***) qanoatlantiriladi.

3.2.7. Aksioma. F maydon va S F submaydon oilasi berilgan. Barcha submaydonlarning kesishmasi $\bigcap \mathrm{S}$, F ning ham submaydondir.

Isbot. $S = \bigcap \mathrm{S}$ berilgan. u holda, har bir submaydon 0_F va $e$ni o'z ichiga oladi. $0_F, e \in S$. U holda berilgan $x, y \in S$ bo'ladi. Agar U, S ning o'ziga xos elementi bo'lsa, u holda $x - y, xy \in U$ bo'ladi va $x - y, xy$ bo'ladi. Natijada S (***SF 1***) natijani qanoatlantiradi va $x - y, xy \in S$ bo'ladi. Yuqoridagi kabi S (***SF 2***)ni ham qanoatlantiradi va 3.2.6. orqali natija xulosa qila olamiz.

Bu maydonlarning birlashgan qiymatga ega bo'lgan kolleksiya umumiy holda maydon emas. Biroq M ni to'plam deb faraz qilamiz. M ning aniq subto'plamlari, L ni o'z ichiga oladi va u mahalliy deb ataladi, agar har bir $H, K \in$ L subto'plam futi, $L \in$L $H, K \subseteq L$ bo'lsa.

Mahalliy oilaning maxsus tipi, chiziqli tartibda bo'ladi L oila M ning subto'plamlarini o'z ichiga oladi va u, chiziqli tartibli deb ataladi. Agar har bir subto'plam juftliklari $H, K \in$ L bo'lsa, $H \subseteq K$ yoki $K \subseteq H$ uchun o'rinli bo'lsa.

3.2.8. Aksioma. F maydon va L berilgan L $\to F$ ning mahalliy oila submaydonidir. U xolda, $\bigcup$L birlashgan barcha submaydonlar ham shuningdek F ning subto'plami bo'ladi.

Isbot. $V = \bigcup$L berilgan va $x, y \in V$ berilgan. Mavjud bo'lgan $H, K \in$ L submaydonlar ($x \in H,\ y \in K$). Biz $L \in$L submaydonni ya'ni ikkita submaydonni H, K o'z ichiga olgan va $x, y \in L$ bo'lgan submaydonni tanlaymiz. L maydon bo'ladi. 3.2.6. teoremaga ko'ra $x - y, xy \in L$. U holda $x - y,\ xy \in V$ bo'ladi. natijada V (***SF 1***)ni qanoatlantiradi. Shu kabi faktlar bilan bizga V ni (***SF 2***)ni qanoatlantirishini imkonini beradi. Hozir biz 3.2.6. teoremani natijasini xulosalay olamiz.

3.2.9. Aksioma. F maydon va F submaydonning chiziqli, tartibli oilasi bo'lgan L berilgan. U holda $\bigcup$L barcha subto'plamlarning birlashma ham F ning subto'plamidir.

3.2.10. Aksioma. F maydon va

$$H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_n \leq \cdots$$

berilgan. Bu F subto'plamning o'sib boradigan znjiridir. U holda $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ F ning submaydonidir.

Kichikroq maydonlar bizga qiziqarli, shuning uchun biz quyidagi ta'rifda kuzatib boramiz.

3.2.11.Ta'rif. F maydon berilgan. U holda F ning barcha submaydonlari F_0 kesishma bosh(asosiy) submaydon deyiladi. F asosiy deyiladi, agar, F bosh submaydon bilan mos kelsa. Agar F bosh maydon bosh maydon bo'lsa buni kirish oson, u holda F haqiqiy submaydonlarga ega emas.

Ratsional sonlarning $\mathbb{Q}$ maydoni bu bosh maydon (asosiy) bo'ladi. buni ko'rish uchun $\mathbb{Q}$ submaydonning Psi berilgan. 3.2.6. teoremada $1 \in P$ bo'ladi (***SF 1***) ga ko'ra biz quyidagilarga ega bo'lamiz $2 = 1 + 1 \in P,\ 3 = 2 + 1 \in P$ va shu kabi, har bir $n \in \mathbb{N}$ uchun biz, $n = n1 \in P$ ga ega bo'lamiz. Yana (***SF 1***)ga ko'ra biz $-n = 0 - n \in P\ \left(n \in \mathbb{N}, n \in P, n \in \mathbb{Z}\right)$ bo'lishini ko'ramiz. Shunday qilib $\mathbb{Z} \subseteq P$, agar $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ bo'lsa, u holda (***SF 2***)ga ko'ra $\frac{1}{k} \in P$ bo'ladi. Hozir, barcha $r, k \in \mathbb{Z}$ uchun bu yerda $k \neq 0,\ \frac{r}{k} = r\left(\frac{1}{k}\right) \in P$ bo'ldi. U holda $\mathbb{Q} \subseteq P$ shuningdek $P = \mathbb{Q}$ ekanligini ko'rsatadi.

$\mathbb{F}_p$ maydon, P bu asosiy, asosiy maydondir. $\mathbb{F}_p$ ning submaydoni Pni ko'rishimiz mumkin. 3.2.6. teoremasi nazarda tutib $1 \in P$ni belgilaymiz. Dastlabki paragrfda biz $2, \ldots, p-1 \in P$ ekanligini ko'rgan edik, va shuning uchun $\mathbb{F}_p \subseteq P \quad P = \mathbb{F}_p$ bo'ladi.

Haqiqiy sonlar $\mathbb{R}$ maydoni asosiy emas, u $\mathbb{Q}$ning tarkibida $\mathbb{Q}$ va $\mathbb{R}$ o'rtasida submaydonlar bor. Biroq, o'quvchilar $\mathbb{R}$ning $\mathbb{Q}$ning tarkibida betamom emasligidan ogohlantiriladi.

r musbat butun son va $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$ deb faraz qilamiz.

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right) = \left\{a + b\sqrt{r} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

bo'ladi.

Berilgan α, β $\mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right)$ ning elementlari, $\alpha = a + br$ va $\beta = a_1 + b_1 r$. Bu osonlik bilan quyidagilarni ko'rsatadi

$$\alpha - \beta = \left(a - a_1\right) + \left(b - b_1\right)\sqrt{r} \text{ va } \alpha\beta = \left(aa_1 + bb_1 r\right) + \left(ab_1 + ba_1\right)\sqrt{r}.$$

Quyida $\alpha - \beta, \alpha\beta \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right)$ni ko'rsatadi. Ayonki $1 \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right)$ shuningdek, agar $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda $a^2 - rb^2 \neq 0$ bo'ladi. $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$ shuning uchun

$$\gamma = \frac{a}{a^2 - rb^2} + \left(\frac{-b}{a^2 - rb^2}\right)\sqrt{r} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right).$$

Bu jarayon orqali, $\alpha\gamma = \gamma\alpha = 1$ $\left(\gamma = \alpha^{-1}\right)$ni tasdiqlash oson bo'ladi. u holda 3.2.6. $\mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right)$ni ko'rsatadi va $\mathbb{R}$ning submaydoni haqiqiy kvadratik maydon deyiladi.

$\mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right)$ning bu tuzilishi natijani umumlashtira oladi. Agar F K ning submaydoni bo'lsa, u holda K F ning guruhi(to'plami) bo'ladi. Qachonki F K ning submaydoni bo'lsa, K ning elementi α bo'ladi. M berilgan va u Kning submaydon oilasidir va u F va αni o'z ichiga oladi. $F\left(\alpha\right) \cap$ M bo'ladi. 3.2.7. aksioma orqali, $F\left(\alpha\right)$ni Kning submaydon ekanligini bilamiz, ta'rif orqali $F\left(\alpha\right)$ F va αni o'z ichiga oladi. Shunday qilib $F\left(\alpha\right)$ va Fning kengaytmasidir.

3.2.12. Ta'rif. K maydonning submaydoni F berilgan va α va Kning elementi. $F\left(\alpha\right)$ submaydon, Fning oddiy kengaytmasi deb ataladi. Biz shuningdek $F\left(\alpha\right)$ni F va αning qo'shilishidan qo'lga kiritlgan deb ham aytishimiz mumkin.

Natijada $\mathbb{Q}\left(\sqrt{r}\right)$, $\mathbb{Q}$ bosh maydonning kengaytmasi bo'ladi va bu yeda qo'shni umumlashtirish juda oson. K maydonning submaydoni F berilgan va Kning submaydoni M xam berilgan. 3.2.7. aksiomaga ko'ra, $F(M)$ Kning submaydoni, ta'rifga ko'ra, $F(M)$ kichikroq submaydon ya'ni u F va Mni o'z ichiga oladi.

3.2.13. Ta'rif. K maydonning F submaydoni va Kning submaydoni berilgan. $F(M)$ submaydon Fning kengaytmasi deyiladi va u M to'plamning Fga qo'shnisi (element) deyiladi.

Biz hozir asosiy(bosh) submaydonlarga qaytamiz va bosh submaydon tuzilishini butun maydonga muhim ta'sirini eslatib o'tamiz. $\mathbb{Z}e = \{ne \mid n \in \mathbb{Z}\}$ submaydonni muhokama qilamiz, ya'ni o'ziga xos element bilan butun sonning ko'paytmasi tenglashtiramiz. Ikki xolat vujudga keladi. Agar $ne \neq ke$ bo'lsa $n \neq k$ bo'ladi, $ne = 0_F$ tenglama mumkin bo'ladi faqat $n = 0$ bo'lsagina.

2-tanlov esa n,m butun sonlarda $n \neq m$ ammo $ne = me$ ekanligini ko'rsatadi. n,m lardan biz qolgan boshqasidan kattaroq bo'ladi va biz $n > m$ deb faraz qilamiz. U holda $n - m > 0$ va $ne = me$ tenglamadan biz $(n-m)e = 0_F$ ligini ko'ramiz.

$$P = \{k \in \mathbb{N} \mid ke = 0_F\}.$$

P subto'plam ozroq elementga ega, t element, ozgina musbat butun son $te = 0_F$. Biz bu yerda $t$ni tub son bo'lishini eslatib o'tamiz. Darhaqiqiat, agar bu holat bo'lmasa, u holda $t = sr$ bo'ladi. Bu yerda $1 < s < t$ va $1 < r < t$ bo'ladi. t ning ta'rifidan $se \neq 0_F$ va $re \neq 0_F$ni ko'ramiz. U holda

$$(se)(re) = (sr)(ee) = (sr)e = te = 0_F,$$

Bu 3.2.3. muammoga qarama qarshilik beradi. Natijada t tub son bo'ladi. Bu holatda, har bir $a \in F$ uchun biz quyidagiga egamiz

$$ta = t(ea) = \underbrace{(ea + \ldots + ea)}_{t} = \underbrace{(e + \ldots + e)a}_{t} = (te)a = 0_F.$$

3.2.14. Ta'rif. F maydon berilgan. Agar $ne \neq ke\ (n \neq k)$ bo'lsa, u holda, F ni 0 harakterga ega deb aytamiz va $\mathrm{char}(F) = 0$ tarzda belgilaymiz(yozamiz). Agar bu p tub son bo'lsa, $pe = 0_F$ bo'ladi. u holda F ni P harakterga ega deb aytamiz va $\mathrm{char}(F) = p$ shaklida yozamiz.

Hozir $\mathrm{char}(F) = p > 0$ deb faraz qilamiz. Berilgan n asosi butun son. 1.4.1. teoremaga ko'ra q, r butun sonlar uchun $n = qp + r$ bo'ladi va bu yerda $0 \le r < t$ bo'ladi. U holda biz quyidagiga ega bo'lamiz

$$ne = (qp + r)e = qpe + re = q(pe)re = q0_F + re = 0_F + re = re.$$

Bundan quyidagi natija kelib chiqadi

$$\mathbb{Z}e \subseteq \{0e = 0_F, 1e = e, 2e, \ldots, (p-1)e\}.$$

Ba'zi o'xshash ma'lumotlardan foydalanib $0e = 0_F, 1e = e, 2e, \ldots, (p-1)e$ lar alohida va quyidagicha

$$\mathbb{Z}e = \{0e = 0_F, 1e = e, 2e, \ldots, (p-1)e\}.$$

Shunday qilib, F ning bosh submaydoni p xarakterga ega va $\mathbb{F}_p$ dir.

Biz endi, maydonlarning aniq akslantirishlariga e'tibor qaratamiz. Bu algebraik maydonlarni akslantirishni xis qilishga yordam beradi. Biz oldin turli xil g'oyalarni ko'rganmiz

3.2.15. Ta'rif. F, K maydonlar berilgan $f : F \to K$ akslantirish gamomorfizm deb ataladi. Agar quyidagi talab bajarilsa

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ va } f(xy) = f(x)f(y)$$

barcha $x, y \in F$ lar uchun.

Injective (ichiga akslantirish) gomomorfizm, *monomorfizm* deb ataladi va surjevtive akslantirish esa *epimorfizm* deb ataladi. Ustiga akslantirish *izomorfizm* deyiladi.

Agar $f: F \to K$ akslantirish izomorfizm bo'lsa, u holda iz eslatib o'tgan 3.1. bo'limdagi akslantirish $f^{-1}: K \to F$ ham izomorfizm bo'ladi. F va K maydonlar izomorfik deyiladi, agar F, K ga akslansa va bu holatda biz $F \cong K$ deb yozamiz. Ayonki, $e_F: F \to F$ akslantirish ham izomorfizmga misol bo'la oladi.

Buni ko'rish juda oson bo'ladi, agar $f: F \to K,\ g: K \to L$ maydonlar gomomorfizmi bo'lsa $g \circ f: F \to L$ ko'paytma ham gomomorfizm bo'ladi. agar $f: F \to K$ akslantirish $f(x) = 0_K$ orqali $(x \in F)$ topiladi, u holda f gamoomrfizm nol gamomorfizm deyiladi.

3.2.16. Teorema. F va K ni maydonlar deb faraz qilamiz.ikki va $f: F \to K$ gamomorfizmi berilgan. Quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi

(i) $f(0_F) = 0_K$.

(ii) $f(-x) = -f(x)$ barcha $x \in F$ uchun.

(iii) $f(x - y) = f(x) - f(y)$ barcha $x, y \in F$ uchun.

(iv) Agar f nol bo'lmagan gamomorfizm bo'lsa, u holda $f(e)$ k ning o'ziga xos elementi bo'ladi.

(v) Agar f nol bo'lmagan gamomorfizm bo'lsa va x F ning nol bo'lmagan elementi bo'lsa, u holda $f\left(x^{-1}\right) = \left(f(x)\right)^{-1}$ bo'ladi.

(vi) F ning submaydoni H berilgan. Agar f nol bo'lmagan gamomorfizm bo'lsa, u holda $f(H)$ k ning submaydoni bo'ladi. $\operatorname{Im} f = f(F)$ esa K ning submaydoni bo'ladi.

(vii) Agar f nol bo'lmagan gamomorfizm bo'ladi. $f(F)$ esa K ning ba'zi izomorfik bo'ladi.

Isbot.

(i) Bizda har bir $x \in f$ uchun $x + 0_F = x$ bor. U holda

$$f(x) + f(0_F) = f(x + 0_F) = f(x).$$

U holda $f(x)$ qarama-qarshi $-f(x)$ ga ega (k da) va biz tenglamaning ikki tomoniga $-f(x)$ni qo'shamiz.

$$f(0_F) = 0_K + f(0_F) = -f(x) + f(x) + f(0_F) = -f(x) + f(x) = 0_K,$$

biz $f(0_F) = 0_K$ dan yuqoridagini qo'lga kiritdik.

(ii) Qarama-qarshi elementning ta'rifidan biz $x + (-x) = 0_F$ ifodaga ega bo'lamiz. Shunday qilib,

$$0_K = f(0_F) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = f(-x) + f(x).$$

Bu tenglama $f(-x)$ni $f(x)$ning qarama-qarshi elementi ekanligini ko'rsatadi va $f(-x) = -f(x)$ deb ataladi

(iii) Bizda

$$\begin{aligned} f(x-y) &= f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) \\ &= f(x) + (-f(y)) = f(x) - f(y) \end{aligned}$$

ga ega bo'ldik va bu orqali (iii)ni isbotladik.

(iv) $f(e) = 0_K$ deb faraz qilamiz. Barcha element $x \in F$ uchun, biz quyidagiga ega bo'lamiz

$$f(x) = f(xe) = f(x)\, f(e) = f(x) 0_K = 0_K,$$

U holda f nol gamomorfizm emas. Shu sababli $f(x)$ $k$ning bo'lmagan elementi va $f(e)$ k dan teskari multiplikativ elementga ega. Biz k ning o'ziga xos elementini e deb, o'ziga xos element ta'rifidan quyidagi natijaga ega bo'lamiz

$f(e) = f(ee) = f(e)\,f(e).$

Tenglamaning ikkala tomonini $f(e)^{-1}$ ga ko'paytirib, quyidagiga ega bo'lamiz

$f(e)^{-1} f(e) = f(e)^{-1} f(e) f(e)$

va $f(e) = e_1$ deb yakunlaymiz.

(v) Buning isboti (ii)ning isboti bilan bir xil.

(vi) $u, \upsilon \in f(H)$ berilgan. U holda $x, y \in H$ element uchun $u = f(x)$ va $\upsilon = f(y)$ bo'ladi. (iii)dan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz $u - \upsilon = f(x) - f(y) = f(x - y)$. U holda H subto'plam deyiladi va $x - y \in H$, shuning uchun $f(x - y) = u - \upsilon \in f(H)$.

Shu sababli H submaydondir $xy \in H$, bunday $f(xy) = u\upsilon \in f(H)$ va $f(H)$ni (***SF 1***)ni qnaoatlantirishi oydinlashadi.

$u \neq 0_K$ deb faraz qilamiz. U holda (i) $x \neq 0_F$ ekanligini ko'rsatadi. Shu sababli H, submaydondir. $x^{-1} \in H$ va (v) $u^{-1} = f(x)^{-1} = f\left(x^{-1}\right) \in f(H)$ orqali $f(H)$ (***SF 2***)ni talabni ham qanoatlantiradi 3.2.6. teoremaga ko'ra $f(H)\,K$ning submaydoni bo'ladi.

(vii) Zididyat uchun, $x, y \in F$ elementlar $x \neq y$ ammo $f(x) = f(y)$ bo'ladi. U holda $0_K = f(x) - f(y) = f(x - y)$ bo'ladi, $z = x - y$. Shu sababli $x \neq y$ da $z \neq 0_F$ va z teskarisiga ega bo'ladi. (iv) orqali

$$e_1 = f(e) = f\left(zz^{-1}\right) = f(z)\,f\left(z^{-1}\right) = 0_K\, f\left(z^{-1}\right) = 0_K,$$

Bizga X ni Y ga akslantiruvchi A operator berilgan bo`lsin. D(A) − uning aniqlanish sohasi, ImA esa uning qiymatlar sohasi bo`lsin.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy y ∈ ImA uchun Ax = y tenglama yagona yechimga ega bo`lsa, u holda A teskarilanuvchan operator deyiladi. Agar A teskarilanuvchan operator bo`lsa, u holda ixtiyoriy y ∈ ImA ga Ax = y tenglamaningyechimibo`lganyagona x∈D(A) elementmoskeladi. Bu moslikni o`rnatuvchi operator A operatorga teskari operator deyiladi va A−1 bilan belgilanadi, hamda

$$A^{-1}:\ Y \to X, \qquad D\left(A^{-1}\right) = ImA,\ ImA^{-1} = D(A).$$

Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

$$A^{-1}Ax = x, \quad x \in D(A), \quad AA^{-1}y = y, \quad y \in D\left(A^{-1}\right)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Endi A akslantirish X ni o`zini-o`ziga akslantiruvchi chiziqli operator bo`lsin. Agar B ∈ L(X, X) = L(X) operator uchun BA = I bo`lsa, u holda B operator A operatorga chap teskari operator deyiladi.

Xuddi shunday, AC = I tenglik bajarilsa, C operator A ga o`ng teskari operator deyiladi.

32.1-tasdiq. Agar A operator uchun ham chap teskari, ham o`ng teskari operatorlar mavjud bo`lsa, u holda ular o`zaro teng. Isbot. A uchun B chap teskari, C o`ng teskari operatorlar bo`lsin, u holda B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. ∆

32.1-misol. A : `2 → `2, Ax = (0, x1, x2, ...,xn−1, ...) operatorga chap teskari operatorni toping. A o`ngga siljitish operatori deyiladi.

Yechish. B : `2 →`2 bilan chapga siljitish operatorini belgilaymiz:

Bx = (x2, x3, ...,xn+1, ...).

Endi BA operatorning x∈`2 elementga ta'sirini qaraymiz.

BAx = B(Ax) = B(0, x1, x2, ...,xn−1, ...) = (x1, x2, ...,xn, ...) = Ix.

Demak, B operator A uchun chap teskari operator ekan. 32.2.32.1-misoldakeltirilgan A : `2 →`2 operatorgao`ngteskarioperator mavjudmi?

Yechish. Faraz qilaylik, A ga o`ng teskari operator mavjud bo`lsin. Uni C : `2 → `2 orqali belgilaymiz. 32.1-tasdiqqa ko`ra (32.1-misolga qarang) B = C bo`ladi, ya'ni

$$Cx = (x2, x3, ...,xn+1, ...).$$

Endi AC operatorning x∈`2 elementga ta'sirini qaraymiz.

$$ACx = A(Cx) = A(x2, x3, ...,xn+1, ...) = (0, x2, ...,xn, ...)6= Ix.$$

Demak, C operator A uchun o`ng teskari operator emas ekan. Bundan A uchun o`ng teskari operatorning mavjud emasligi kelib chiqadi.

32.2-tasdiq. Agar A uchun bir vaqtda ham o`ng teskari, ham chap teskari operatorlar mavjud bo`lsa, u holda A teskarilanuvchan operator bo`ladi va A−1 = B = C tenglik o`rinli. 32.2 tasdiqning isboti 32.1-tasdiq va (32.1) tenglikdan kelib chiqadi.

32.1-teorema. A chiziqli operatorga teskari bo`lgan A−1 operator ham chiziqlidir. Isbot. Shuni aytib o`tish kerakki, ImA = D(A−1) chiziqli ko`pxillilikdir. Shunday ekan ixtiyoriy α1, α2 sonlar va ixtiyoriy y1, y2 ∈ ImA elementlar uchun

$$A−1 (α1 y1 + α2 y2) = α1A−1y1 + α2A−1y2$$

tenglikningto`g`riekanliginiko`rsatishyetarli. Ax1 = y1 va Ax2 = y2 deymiz. A chiziqli bo`lgani uchun

$$A(α1 x1 + α2 x2) = α1y1 + α2y2. (32.3)$$

Teskari operator ta'rifga ko`ra,

$$x1 = A−1y1, x2 = A−1y2.$$

Bu tengliklarni mos ravishda α1 va α2 sonlarga ko`paytirib qo`shsak,

$$α1 x1 + α2 x2 = α1A−1y1 + α2A−1y2.$$

Ikkinchi tomondan, (32.3) dan va teskari operatorning ta'rifdan

$$α1 x1 + α2 x2 = A−1(α1y1 + α2y2)$$

tenglik kelib chiqadi. Oxirgi ikki tenglikdan (32.2) tenglikni olamiz.