1-mavzu. Matritsalar va ular ustida amallar

Reja

1.1. Matritsaga doir asosiy tushunchalar.
1.2. Matritsalar ustida amallar.
1.3. Texnologik matritsa tushunchasi.
1.4. Excelda matritsalar ustida amallarni bajarish.

Tayanch so‘z va iboralar: matritsa, satr matritsa, ustun matritsa, satr-vektor, ustun-vektor, vektor komponenti, nol matritsa, teng matritsa, zanjirlangan matritsalar, kvadrat matritsaning bosh diagonali, diagonal matritsa, skalyar matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, simmetrik matritsa, qiya simmetrik matritsa, texnologik matritsa.

Matritsa tushunchasi va unga asoslangan matematikaning “Matritsalar algebrasi” bo‘limi amaliyotda, jumladan, iqtisodiyotda katta ahamiyat kasb etadi. Bu shu bilan tushuntiriladiki, aksariyat iqtisodiy obyekt va jarayonlarning matematik modellari matritsalar yordamida sodda va kompakt ko‘rinishida tasvirlanadi.

Matritsa tushunchasi birinchi marta ingliz matematiklari U.Gamilton (1805-1865-y.y.) va A.Kel (1821-1895 y.y.) ishlarida uchraydi. Hozirgi kunda matritsa tushunchasi tabiiy va amaliy jarayonlarning matematik modellarini tuzishda muhim vosita sifatida qo‘llaniladi.

1-ta’rif. Matritsa deb, m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan qavslar ichiga olingan to‘rtburchakli sonlar jadvaliga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani tashkil qilgan sonlar uning elementlari deyiladi. Matritsa o‘lchami $m\times n$ kabi yoziladi. Matritsaning i-satr, j-ustun kesishmasidagi element a_{ij} kabi belgilangan. Demak, a_{34} – 3-satr va 4-ustin kesishmasida joylashgan elementdir.

Ba’zida matritsalarni yozishda (...) qavslar o‘rniga [...] qavslar yoki ||...|| kabi belgilardan foydalaniladi.

Aytaylik quyidagi jadvalda iqtisodiyotning tarmoqlari bo‘yicha resurslarning taqsimlanishi berilgan bo‘lsin:

Resurslar	**Iqtisodiyot tarmoqlari**	
	Sanoat	**Qishloq xo‘jaligi**
Elektr energiyasi resurslari	7,3	5,2
Mehnat resurslari	4,6	3,1
Suv resurslari	4,8	6,1

Bu resurslar taqsimotini matritsa ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin: $A=\begin{pmatrix} 7,3 & 5,2 \\ 4,6 & 3,1 \\ 4,8 & 6,1 \end{pmatrix}$. Bu matritsaning o‘lchami 3×2 bo‘lib, satrlari resurs turlariga ustunlari esa tarmoqlarga mos keladi.

$(1\times n)$ o‘lchamli matritsaga satr matritsa, $(m\times 1)$ o‘lchamli matritsaga esa ustun matritsa deyiladi, ya’ni

$$K=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \quad L=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Bundan tashqari ba’zida bu matritsalar mos ravishda satr-vektor va ustun-vektor deb ham ataladi. Matritsaning elementlari esa vektorlarning komponentlari, deyiladi.

Har bir elementi nolga teng bo‘lgan, ixtiyoriy o‘lchamli matritsaga nol matritsa deb aytiladi va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Theta=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

2-ta’rif. A va B matritsalar bir xil o‘lchamga ega bo‘lib, ularning barcha mos elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, bunday matritsalar teng matritsalar deyiladi va $A=B$ ko‘rinishda yoziladi.

1-misol. Quyidagi matritsaviy tenglikdan x va y noma’lumlarning qiymatlarini toping:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Matritsalarning mos elementlarini taqqoslab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$y = 2, \quad x + y = 2 \Rightarrow x = 0.$$

3-ta'rif. A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo'lsa, A matritsa B matritsa bilan zanjirlangan matritsa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 9 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ matritsalar zanjirlangan matritsalar bo'ladi. Chunki, A matritsaning o'lchami 3×3 ga, B matritsaning o'lchami 3×2 ga teng.

Shuni ta'kidlash lozimki B va A matritsalar zanjirlangan emas. Chunki, B matritsaning ustunlari soni 2 ga, A matritsaning satrlari soni 3 ga teng bo'lib, o'zaro bir xil emas.

4-ta'rif. Ham satrlar soni, ham ustunlar soni n ga teng bo'lgan, ya'ni $n \times n$ o'lchamli matritsa n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 & 1 \\ -2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 11 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & -9 \end{pmatrix}$ matritsa 4-tartibli kvadrat matritsadir.

$a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ elementlarning tartiblangan to'plami kvadrat matritsaning asosiy diagonali deyiladi. Agar $A = (a_{ij})$ kvadrat matritsada $i > j$ $(i < j)$ munosabat bajarilganda $a_{ij} = 0$ bo'lsa, u holda A matritsa yuqori (quyi) uchburchakli matritsa deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{yuqori uchburchakli matritsa})$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{(quyi uchburchakli matritsa)}$$

$A=(a_{ij})$ kvadrat matritsada $i \neq j$ bo‘lganda, $a_{ij}=0$, $i=j$ bo‘lganda, $a_{ij} \neq 0$ bo‘lsa, u holda A matritsaga diagonal matritsa deyiladi ya’ni

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Agar diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi ya’ni

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Agar skalyar matritsada $a=1$ bo‘lsa, u holda bunday matritsaga birlik matritsa deyiladi va odatda E harfi bilan belgilanadi, ya’ni

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

O‘lchamlari aynan teng bo‘lgan matritsalar ustidagina algebraik qo‘shish amali bajariladi.

O‘lchamlari aynan teng bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsalarni qo‘shish uchun, ularning mos elementlari qo‘shiladi, ya’ni

$$A+B=C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matritsani biror haqiqiy λ songa ko‘paytirish uchun bu son matritsaning har bir elementiga ko‘paytiriladi, ya’ni

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mj} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ikkita matritsa ayirmasi quyidagicha topiladi:

$$A-B=D=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1j}-b_{1j} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2j}-b_{2j} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}-b_{i1} & a_{i2}-b_{i2} & \dots & a_{ij}-b_{ij} & \dots & a_{in}-b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mj}-b_{mj} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2-misol. Quyidagi matritsalarning yig‘indisi va ayirmasini toping:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yechish. A va B matritsalarning o‘lchamlari 2×4 ga teng. Shu sababli bu matritsalarni qo‘shish va ayirish mumkin. Ta’rifga asosan

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+4 & 1-1 & 0+2 & 2-2 \\ 1-3 & 4+0 & 3+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3-4 & 1+1 & 0-2 & 2+2 \\ 1+3 & 4-0 & 3-4 & 1-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3-misol. Quyidagi A matritsani $\lambda = 2$ soniga ko‘paytiring:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. $\lambda \cdot A = 2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 7 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 16 & 4 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}.$

4-misol. Firma 5 turdagi mahsulotni ikkita korxonada ishlab chiqaradi. Firmaning ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti quyidagi jadvalda berilgan:

Mahsulot turlari	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	139	160	205	340	430
2-korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori	122	130	145	162	152

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilash natijasida ishlab chiqarishni 17% ga oshirdi. Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimoti qanday bo‘ladi?

Yechish. Firmaning ishlab chiqarish uskunalarini yangilamasdan oldingi ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini quyidagi matritsa ko‘rinishda yozish mumkin:

$$P = \begin{pmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152 \end{pmatrix}.$$

Firma ishlab chiqarish uskunalarini yangilagandan keyin, firmaning bir oyda ishlab chiqargan mahsulotlari taqsimotini topish uchun, bu ishlab chiqarish matritsasini 1,17 ga ko‘paytirish zarur bo‘ladi:

$$1{,}17 \cdot P = 1{,}17 \cdot \begin{pmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \\ 122 & 130 & 145 & 162 & 152 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 162{,}63 & 187{,}2 & 239{,}85 & 397{,}8 & 503{,}1 \\ 142{,}74 & 152{,}1 & 169{,}65 & 189{,}54 & 177{,}84 \end{pmatrix}.$$

Matritsalarni qo‘shish, ayirish, ya’ni algebraik qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallariga matritsalar ustida chiziqli amallar deyiladi.

Matritsalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

1) $A + B = B + A;$ 2) $A + (B + C) = (A + B) + C;$

3) $k(A + B) = kA + kB;$ 4) $k(nA) = (kn)A;$

5) $(k + n)A = kA + nA;$ 6) $A + \Theta = A;$

7) $A + (-A) = \Theta;$ 8) $1 \cdot A = A.$

Bu yerda A, B, C – bir xil o‘lchamli matritsalar, Θ matritsa A, B, C matritsalar bilan bir xil o‘lchamli nol matritsa, k, n – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Faqat va faqat zanjirlangan matritsalar ustida ko‘paytirish amali bajariladi. $m \times p$ o‘lchamli $A=(a_{ij})$ matritsaning $p \times n$ o‘lchamli $B=(b_{jk})$ matritsaga ko‘paytmasi deb elementlari $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ip}b_{pk}$ kabi aniqlanadigan $m \times n$ o‘lchamli $C = (c_{ik})$ matritsaga aytiladi. Bu formuladan ko‘rish mumkinki, A va B matritsalarning ko‘paytmasi C matritsadagi c_{ik} element A matritsaning i-satrida joylashgan har bir elementni B matritsaning k-ustunida joylashgan mos o‘rindagi elementga ko‘paytirish va hosil bo‘lgan ko‘paytmalarni qo‘shish natijasida aniqlanadi.

Masalan, bizga umumiy holda $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ ko‘rinishdagi matritsalar berilgan bo‘lsin. Bu matritsalarni ko‘paytirish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Endi buni aniq misollarda ko‘rib chiqamiz.

5-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga ko‘paytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish. 1. Izlanayotgan $C = AB$ matritsaning c_{11} elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning birinchi ustun mos elementlari bilan ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 6.$$

2. Izlanayotgan $C = AB$ matritsaning birinchi satr va ikkinchi ustunining elementi A matritsaning birinchi satr elementlarini B matritsaning ikkinchi ustun elementlari bilan mos ravishda ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng:

$$c_{12} = (3 \;\; 1 \;\; 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 2.$$

3. Birinchi satr va uchinchi ustun elementi

$$c_{13} = (3\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = -1$$

kabi aniqlanadi.

4. Izlanayotgan matritsaning ikkinchi satr elementlari A matritsaning ikkinchi satr elementlarining B matritsaning mos ravishda 1, 2, 3-ustun elementlari bilan koʻpaytmalarining yigʻindisi sifatida topiladi:

$$c_{21} = \ \ 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = 6;$$
$$c_{22} = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 1;$$
$$c_{23} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1.$$

5. C matritsaning uchinchi satr elementlari ham shunga oʻxshash topiladi:

$$c_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 8;$$
$$c_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -1;$$
$$c_{33} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 4.$$

Shunday qilib,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6-misol. Quyidagi A matritsani B matritsaga koʻpaytiring:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsalar zanjirlangan boʻlganligi sababli ular ustida koʻpaytirish amali bajariladi.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+9+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

Keltirilgan misoldan ko‘rinib turibdiki, A va B matritsalarning ko‘paytmasi kommutativlik (o‘rin almashtirish) xossasiga ega emas, ya’ni $AB \neq BA$. Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa, AB va BA ko‘paytmalarini topish mumkin. Agar A va B matritsalar uchun $AB = BA$ $(AB = -BA)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda A va B matritsalar kommutativ (antikommutativ) matritsalar deyiladi. Masalan, E birlik matritsa ixtiyoriy A kvadrat matritsa bilan kommutativdir. Haqiqatan ham

$$AE = EA = A.$$

Matritsalarni ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

$1)\,(kA)B = k(AB) = A(kB);$ $\qquad 2)\,(A+B)C = AC + BC;$

$3)\,A(B+C) = AB + AC;$ $\qquad 4)\,A(BC) = (AB)C.$

Keltirilgan xossalardan to‘rtinchisini quyidagi misol yordamida tekshiramiz.

7-misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ va $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matritsalar berilgan bo‘lsin:

$$1.\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix},$$

$$2.\ BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 & 4 & 6 \\ 11 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 6 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ko‘rinib turibdiki, ikki xil hisoblash usulida ham natija bir xil.

A kvadrat matritsani $m\ (m > 1)$ butun musbat darajaga ko‘tarish quyidagicha amalga oshiriladi: $A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ marta}.$

Agar A matritsada barcha satrlari matritsaning mos ustunlari bilan almashtirilsa, u holda hosil bo‘lgan A^T matritsa A matritsaga transponirlangan matritsa deyiladi.

Transponirlangan matritsalar quyidagi xossalarga ega:

$1)\,\left(A^T\right)^T = A,$ $\qquad 2)\,(kA)^T = kA^T,$

$3\,(A+B)^T = A^T + B^T,$ $\qquad 4\,(AB)^T = B^T A^T.$

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ bo‘ladi.

Agar A kvadrat matritsa uchun $A=A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda bu matritsaga simmetrik matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ simmetrik matritsaning elementlari bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan.

n-tartibli simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan $\frac{n(n+1)}{2}$ ga teng, bunda n-natural son.

Agar A kvadrat matritsada $A=-A^T$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, bunday matritsaga qiya simmetrik matritsa deb ataladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

n-tartibli qiya simmetrik matritsaning turli elementlari soni ko‘pi bilan n^2-n+1 formula yordamida topiladi, bunda n-natural son.

5-ta’rif. Nolmas satrlarga ega A matritsada har qanday k – nolmas satrning birinchi noldan farqli elementi $(k-1)$ – nolmas satrning birinchi noldan farqli elementidan o‘ngda tursa, u holda A pog‘onasimon matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ matritsa pog‘onasimon matritsadir.

Iqtisodiy masalalarni matematik modellashtirishda, ya’ni, iqtisodiy muammoni matematik ifodalar yordamidagi ifodasida, matritsalardan keng foydalaniladi. Bunda muhim tushunchalardan biri texnologik matritsa tushunchasidir. Bu matritsa, masalan, bir nechta turdagi resurslardan bir nechta mahsulot turlarini ishlab chiqarishni rejalashtirish (programmalashtirish), tarmoqlararo balansni modellashtirish kabi muhim iqtisodiy masalalarda asosiy rolni o‘ynaydi.

Faraz qilaylik, o‘rganilayotgan iqtisodiy jarayonda n xil mahsulot ishlab chiqarish uchun m xil ishlab chiqarish faktorlari (resurslar) zarur bo‘lsin. i-

mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun j-turdagi resursdan a_{ij} miqdori sarflansin. a_{ij} elementlardan tuzilgan $m \times n$ o‘lchamli A matritsa texnologik matritsa deb ataladi.

1-turdagi mahsulotdan x_1 miqdorda, 2-turdagi mahsulotdan x_2 miqdorda, ..., n-turdagi mahsulotdan x_n birlik miqdorda ishlab chiqarilishi talab qilinsin. Bu rejani $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ ustun vektor ($n \times 1$ o‘lchamli matritsa) shaklida ifodalaymiz. U holda 1-turdagi resurs sarfi $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$ ga, ikkinchi turdagi resurs sarfi $a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n$ ga teng. Umumlashtiradigan bo‘lsak, ishlab chiqarish rejasini bajarish uchun zarur bo‘lgan j-turdagi resurs sarfi $a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n$ birlikka teng. Bu miqdorlarni ustun vektor sifatida yozsak aynan AX ko‘paytmani hosil qilamiz.

j-mahsulotning bir birligining narxi c_j bo‘lsin. Narxlar vektorini $C = (c_1, \dots, c_n)$ ko‘rinishda ifodalaymiz. U holda CX ko‘paytma, matritsalarni ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra, skalyar miqdor, ya’ni sondan iborat. Bu son ishlab chiqarishdan olingan daromadni ifodalaydi.

i-turdagi resurs zahirasi miqdori b_i birlikka teng bo‘lsin. Resurs zahiralari vektorini ustun vektor shaklida ifodalaymiz: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$. U holda $AX \le B$ tengsizlik ishlab chiqarishda resurs zahiralari hisobga olinishi zarurligini bildiradi. Bu vektor tengsizlik AX vektorning har bir elementi B vektorning mos elementidan katta emasligini bildiradi. $AX \le B$ shartni qanoatlantiruvchi X rejani joiz reja, deb ataymiz. Ma’nosidan kelib chiqadigan bo‘lsak, har qanday X rejaning elementlari musbat sonlardan iborat bo‘lishi zarur.

8-misol. Korxona ikki turdagi transformatorlar ishlab chiqaradi. 1-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 5 kg temir va 3 kg sim, 2-turdagi transformator ishlab chiqarish uchun 3 kg temir va 2 kg sim sarflanadi. Bir birlik transformatorlarni sotishdan mos ravishda 6 va 5 sh.p.b. miqdorida daromad olinadi. Korxonaning omborida 4,5 tonna temir va 3 tonna sim mavjud.

Texnologik matritsa, narxlar vektori va resurs zahirasini ifodalovchi vektorni tuzing. $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejalar joiz reja bo‘la oladimi?

Yechish. Korxona ikki turdagi resursdan foydalanib 2 turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Narxlar vektori $C = (6,5)$. Resurs zahiralari vektori $B = \begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix}$.

Texnologik (resurs sarfi normasi) matritsa $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. Bu rejani bajarishdagi resurs sarfi

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

ga teng. Bu sarf zahiradan oshib ketmasligi kerak, ya’ni $AX \le B$ yoki

$$5x_1 + 3x_2 \le 4500,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 3000.$$

Joiz reja yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantirishi zarur.

1) $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4300 \\ 2700 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 4500 \\ 3000 \end{pmatrix},$$

ya’ni bu reja joiz reja. Bu reja asosida olinadigan daromad miqdori $CX = (6 \quad 5)\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix} = (6000)$ sh.p.b. ga teng.

2) $X = \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ rejani qaraymiz. U holda

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}.$$

Bundan ko‘rish mimkinki, 1-turdagi resurs sarfi 4800 ga teng bo‘lib, resurs zahirasi 4500 dan katta. Shu sababli, qaralayotgan reja joiz reja emas.

9-misol. Korxona m turdagi resurslarni qo‘llab, n turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. j-turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga ketgan i-xom ashyo resurslari harajatlarining normalari $A_{m\times n}$ matritsa bilan berilgan. Vaqtning ma’lum oralig‘ida korxona har bir turdagi mahsulotdan x_{ij} miqdorini ishlab chiqargan bo‘lsin. Uni $X_{n\times 1}$ matritsa bilan ifodalaymiz.

Vaqtning berilgan davrida barcha mahsulotning har bir turini ishlab chiqarishga ketgan resurslarning to‘la harajatlar matritsasi S ni aniqlang. Berilgan

$$A_{4\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Resurslarning to‘la harajatlar matritsasi S A va X matritsalarning ko‘paytmasi sifatida aniqlanadi, ya’ni $S = AX$.
Berilgan masalaning sharti bo‘yicha

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 930 \\ 960 \\ 450 \\ 690 \end{pmatrix}.$$

Berilgan vaqt orlig‘ida 930 birlik I turdagi resurs, 960 birlik II turdagi resurs, 450 birlik III turdagi resurs, 690 birlik IV turdagi resurs sarf qilingan.

10-misol. Korxona mahsulotning n turini ishlab chiqaradi, ishlab chiqariladigan mahsulot hajmlari $A_{1\times n}$ matritsa bilan berilgan. j-mintaqada mahsulotning i-turi birligining sotilish narxi $B_{n\times k}$ matritsa bilan berilgan, bu yerda k-mahsulot sotilayotgan mintaqalar soni.

Mintaqalar bo‘yicha daromad matritsasi C ni toping.

$$A_{1\times 3} = (100, 200, 100); \quad B_{n\times k} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

bo‘lsin.

Yechish. Daromad $C_{1\times k} = A_{1\times n} \cdot B_{n\times k}$ matritsa bilan aniqlanadi, $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{ij}$ – bu j-mintaqada korxonaning daromadi quyidagicha:

$$C = (100, 200, 100) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (600, 1300, 700, 1300).$$

MS Excel dasturida matritsalarni qo‘shish, songa ko‘paytirish va matritsalarni ko‘paytirishga misollar keltiramiz.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ matritsalarni qo‘shish talab qilinsin.

I) Matritsalarni quyidagi ko‘rsatilgan jadvallar shaklida MS Excelga kiritamiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		0	4	3
6	B=	2	-2	3

II) Biror katakka matritsalarning 1-elementlari yig‘indisini topish uchun formula kiritamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			=B2+B5		
4						A+B=			
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

III) 2x3 o‘lchamli jadvalni bu katakdagi formulani avtomatik ko‘chirish usuli bilan to‘ldiramiz. Buning uchun sichqonchani bu katakning pastki o‘ng burchagiga keltiramiz. Qalin qora kursor (krestik) paydo bo‘lganda sichqonchaning chap tugmasini bosamiz va oldin satr bo‘yicha uch katakka, keyin ustun bo‘yicha ikki kattakka tortamiz.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		1	-3	5					
3	A=	2	3	2			1	1	8
4						A+B=	4	1	5
5		0	4	3					
6	B=	2	-2	3					
7									

Natijada matritsalarning yig‘indisi hosil bo‘ladi.

2) Yuqoridagi A matritsani 2 ga ko‘paytiramiz. Buning uchun A matritsani 2 ga ko‘paytirish formulasini biror katakka kiritamiz. Bu katakdagi formulani yuqorida tushuntirilgan usulda avtomatik to‘ldiramiz.

	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		=B2*2		
6	2A=			
7				

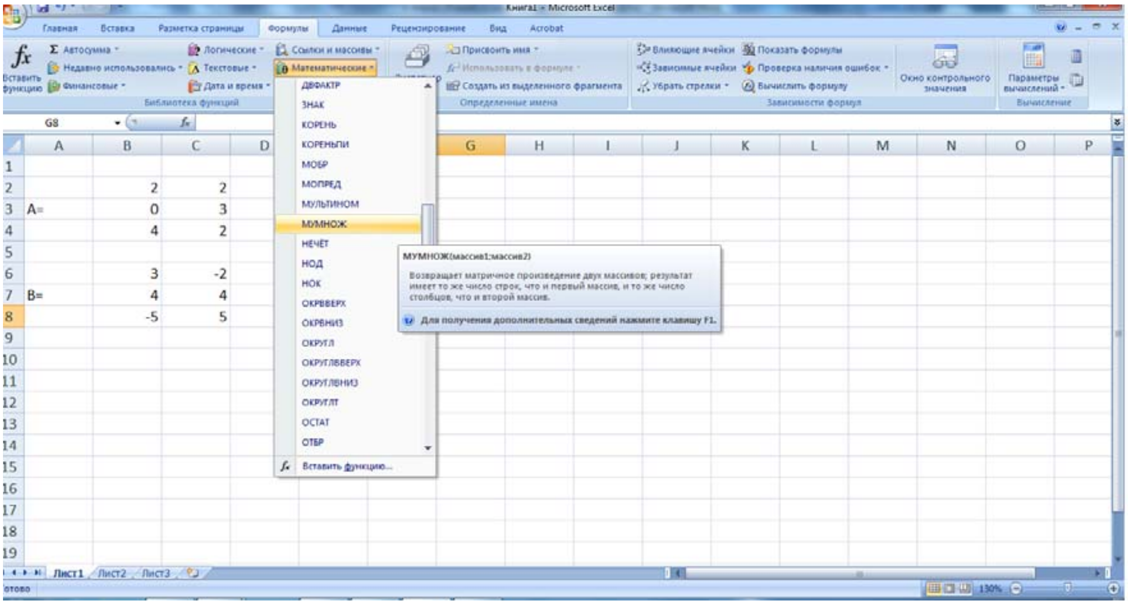
	A	B	C	D
1				
2		1	-3	5
3	A=	2	3	2
4				
5		2	-6	10
6	2A=	4	6	4
7				

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ bo‘lsin. AB ko‘paytmani topamiz. A matritsa o‘lchamlari 3×3 va B matritsa o‘lchamlari 3×2 bo‘lganligi sababli, ko‘paytmaning o‘lchamlari 3×2 bo‘ladi.

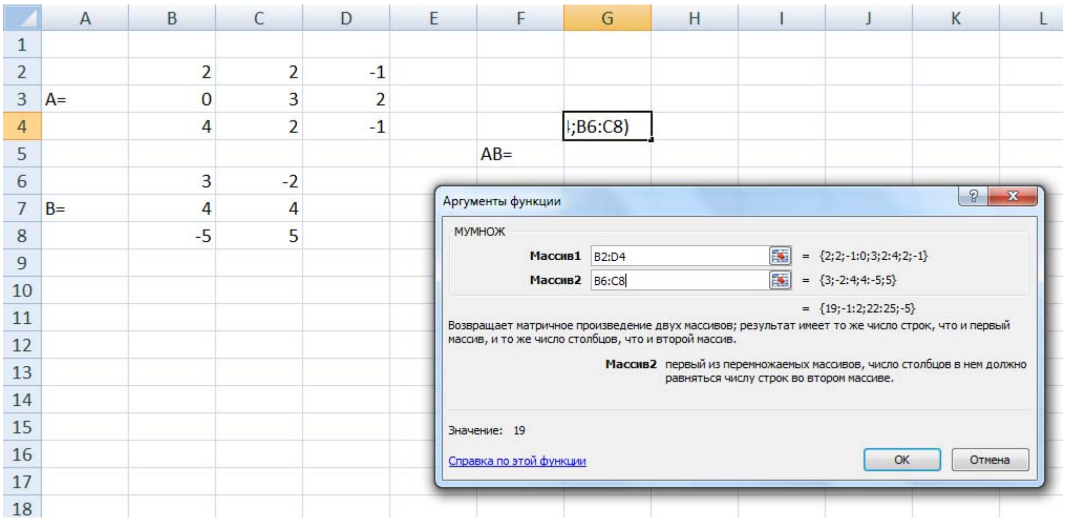
I) A va B matritsalarni Excelda jadval shaklida kiritamiz.

	A	B	C	D	E
1					
2		2	2	-1	
3	A=	0	3	2	
4		4	2	-1	
5					
6		3	-2		
7	B=	4	4		
8		-5	5		
9					

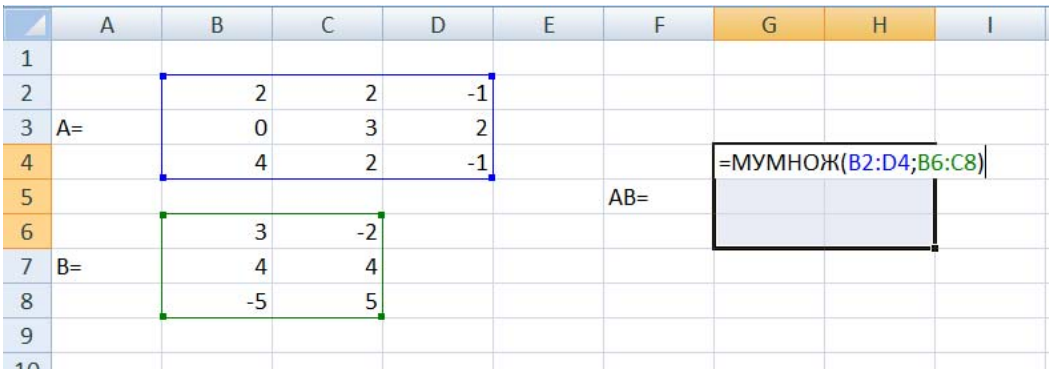
II) Excel funksiyalari ro‘yxatidan matematik funksiyalar ro‘yxatini topamiz. bu ro‘yxatdan ‘МУМНОЖ’ funksiyani tanlaymiz.



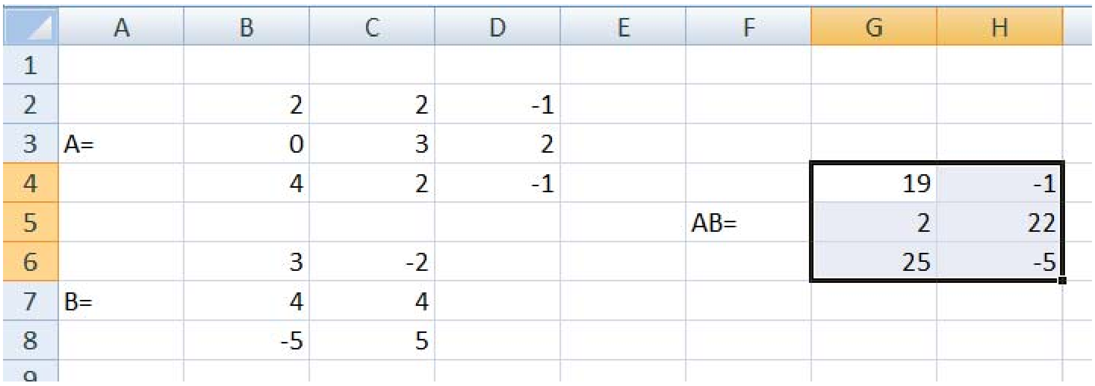
III) Hosil bo‘lgan yangi oynachada ‘Массив1’ qatoriga A matritsa koordinatalarini, ‘Массив2’ qatoriga B matritsa koordinatalarini kiritamiz. Enter tugmasini bosamiz.



IV) Bunda funksiya kiritilgan katakda ko‘paytmaning faqat bitta elementi hosil bo‘ladi. Boshqa elementlarni topish uchun ko‘paytma o‘lchovlariga mos uchta satr va uchta ustunli jadvalni rasmdagiday belgilaymiz va F2 tugmasini bosamiz.



V) Ctrl+Shift+Enter tugmalarni bir paytda bosamiz. Belgilangan kataklarda matritsalar ko‘paytmasi hosil bo‘ladi.



Demak, $AB=\begin{pmatrix} 19 & -1 \\ 2 & 22 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}.$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?

3. Nol matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsalarni qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallari bo‘ysunadigan xossalarni sanab o‘ting?
5. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
6. O‘zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko‘paytiriladi?
7. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday xossalarga bo‘ysunadi?
8. Matritsalarni ko‘paytirish amali o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysunadimi?
9. n-tartibli kvadratik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
10. Kvadrat matritsaning qanday xususiy ko‘rinishlarini bilasiz?

Foydalanishga tavsiya etiladigan adabiyotlar ro‘yxati

1. Mike Rosser. Basic mathematics for economists. London and New York. 1993, 2003.
2. M.Harrison and P.Waldron. Mathematics for economics and finance. London and New York. 2011.
3. M.Hoy, J.Livernois et. al. Mathematics for Economics. The MIT Press, London&Cambridge, 2011.
4. Robert M. Leekley. Applied Statistics for Businiess and Economics. USA. 2010.
5. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright. Fundamental Methods of Mathematical Economics. N.-Y. 2005.
6. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika. O‘quv qo‘llanma. “Iqtisod-moliya”. 2017. 386 b.
7. Бабаджанов Ш.Ш. Математика для экономистов. Учебное пособие. “Iqtisod-moliya”. 2017. 746 с.